

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
проректор

_____ П. А. Машаров
«17» апреля 2025 г.
МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа бакалавриата
Направление подготовки	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины **«Избранные вопросы теории функций»** для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений
доктор физ.-мат. наук, профессор

В.В. Волчков

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и
информационных технологий
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Комплексный анализ, Функциональный анализ.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Гармонический анализ, Интегральные преобразования, Современные проблемы математики, Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная), Производственная практика: преддипломная практика (обязательная), Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.03.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.В.ОД.15. Избранные вопросы теории функций
Часть образовательной программы	Вариативная часть: выбор вуза
Количество зачетных единиц / всего часов	3 / 108

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	4	8	20	40	0	48	108	экзамен

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Формирование научного мировоззрения; овладение новым математическим аппаратом; углубление и применение знаний, полученных в общих курсах; подготовка к профессиональной деятельности; подготовка к чтению специальной литературы.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-1.1. Разрабатывает программы и реализует преподавание разделов математики, связанных с функциями и их свойствами, в рамках дополнительного образования.

4.3. Результаты обучения

ОПК-1.1.1. Знает определения и утверждения, приёмы доказательства утверждений, методы решения задач, связанных с теорией периодических в среднем функций.

ОПК-1.1.2. Умеет выбирать и использовать необходимые математические методы и вычислительные средства, решать задачи дисциплины (находить разложения функций в ряды Фурье по гармоникам, решать интегральные уравнения типа Абеля, производить преобразования со специальными функциями).

ОПК-1.1.3. Владеет методами теории специальных функций, методами группового анализа, методами исследования структуры решений уравнений свертки.

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименования разделов и тем	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Некоторые специальные функции	1.1. Г-функция 1.2. В-функция 1.3. Цилиндрические функции
Раздел 2. Функции с нулевыми интегралами по кругам	2.1. Примеры и простейшие свойства 2.2. Множества единственности и описание класса V_r 2.3. Теоремы о двух радиусах и свойство Лиувилля
Раздел 3. Функции с нулевыми интегралами по квадратам	3.1. Квадрат как множество Помпейю 3.2. Задача трёх квадратов 3.3. Локальная теорема о квадрате
Раздел 4. Приложения к вопросам анализа	4.1. Теоремы типа Мореры 4.2. Усиление теоремы Дзядыка 4.3. Аппроксимация индикаторами

6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 4, семестр – 8

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Некоторые специальные функции	3		8	12	23
Г-функция	1		1	2	4
В-функция	1		1	2	4
Цилиндрические функции	1		6	8	15
Раздел 2. Функции с нулевыми интегралами по кругам	8		12	12	32

Примеры и простейшие свойства	2		4	4	10
Множества единственности и описание класса V_r	3		4	4	11
Теоремы о двух радиусах и свойство Лиувилля	3		4	4	11
Раздел 3. Функции с нулевыми интегралами по квадратам	6		12	12	30
Квадрат как множество Помпейю	2		4	4	10
Задача трёх квадратов	2		4	4	10
Локальная теорема о квадрате	2		4	4	10
Раздел 4. Приложения к вопросам анализа	3		8	12	23
Теоремы типа Мореры	1		4	6	11
Усиление теоремы Дзядыка	1		2	4	7
Аппроксимация индикаторами	1		2	2	5
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП	20	–	40	48	108

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

Раздел 1

1. Аналитическое продолжение Γ -функции и V -функции.
2. Формула удвоения Лежандра.
3. Разложение $1/\Gamma$ в бесконечное произведение.
4. Функции Бесселя первого рода (разложение в ряд, линейная зависимость и независимость, формулы дифференцирования, рекуррентное соотношение, дифференциальное уравнение, интеграл Бесселя, асимптотика на бесконечности, свойства нулей, полнота).

Раздел 2

5. Пример Чакалова.
6. Теорема о среднем для решений уравнения Гельмгольца.
7. Уравнение Абеля.
8. Простейшие свойства класса функций с нулевыми интегралами по кругам фиксированного радиуса.
9. Теорема единственности Джона-Смита и ее обобщения.
10. Структура класса V_r .
11. Теорема Зальцмана о двух радиусах.
12. Локальная теорема о двух радиусах.
13. Теоремы типа Лиувилля для класса функций с нулевыми интегралами по кругам.

Раздел 3

14. Теорема Помпейю.
15. Теорема Произволова.
16. Теорема Малюгина.
17. Теорема о квадрате для локально суммируемых функций (метод сглаживания).
18. Теорема Беренштейна-Тэйлора-Лаирда.
19. Обобщение теоремы о трёх квадратах.
20. Преобразование Радона, теорема Крамера-Вольда.

21. Задача о минимальном круге для квадрата.

Раздел 4

22. Усиление теоремы Мореры, теорема Зальцмана.
23. Геометрическое описание голоморфных функций.
24. Отображения, сохраняющие меру.
25. Аппроксимация индикаторами.

7.2. Темы докладов (рефератов)

1. Группа вращений евклидова пространства.
2. Элементы теории представлений групп.
3. Инвариантное интегрирование.
4. Преобразование Фурье радиальных функций и их обобщений.
5. Свойства функций Бесселя.
6. Свойства Г-функции и В-функции в комплексной плоскости.
7. Сферические гармоники.
8. Дробное дифференцирование и интегрирование.

7.3. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике:

- радиальные функции и их обобщения (продолжение до радиальной функции, вычисление радиализации, разложение в ряд Фурье по гармоникам);
- теоремы о среднем (вычисление интегралов с помощью теорем о среднем);
- решение интегральных уравнений (решить интегральное уравнение типа Абеля).

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

7.4. Образец содержания экзаменационного билета:

1. Теорема о двух радиусах.
2. Вычислить интеграл $\iint_{|z-w|\leq r} J_m(\rho) e^{im\varphi} dx dy$.
3. Решите уравнение $\int_0^x \frac{f(t)dt}{\sqrt{x-t}} = x^n$.

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально

возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

8.1. Семестр 8

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-3	Организационно-учебная работа в аудитории	5
	Самостоятельная работа	5
	Контрольные работы по практике	50
	Контрольная работа по теоретическому материалу	40
ИТОГО		100
Промежуточная аттестация		100
Общий итог за семестр		100

Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

10.1. Основная литература

1. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Математический сборник. - 1995. - Т. 186, № 6. - С. 15–34.
2. Волчков В.В., Волчков Вит. В., Волčkova Н.П. О некоторых свойствах функций, характеризующих нулевыми интегралами // Математическое образование. - 2021. - № 4 (100), часть II. - С. 38–48.
3. Волчков В.В., Волчков Вит. В., Волčkova Н.П. О некоторых свойствах функций, характеризующих нулевыми интегралами. Окончание // Математическое образование. - 2022. - № 1 (101). - С. 38–47.

10.2. Дополнительная литература

4. Хелгасон С. Преобразование Радона / С. Хелгасон. - М. : Мир, 1983. - 150 с.
5. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. - М.: ИЛ, 1958. - 158 с.
6. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ/С. Хелгасон. - Москва: Мир, 1987 - 736 с.

11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.
2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.
3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).